مقدمه‌ای بر جبر خطی

محسن هوشمند
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

اعلانات

موضوعات بهینه‌سازی

- Bilevel optimization
- Stochastic optimization
- Multiobjective optimization
- Integer programming
- Robust optimization
- Subgradient method
- Dynamic programming
- Combinatorial optimization
- Heuristic optimization
- Conic programming
- Fuzzy optimization
- Semidefinite optimization
- Large scale optimization

جبر خطی

روشی معمول جهت نمایش امری مشهود

- ایجاد مجموعه‌ای از اشیاء (علائم)
- ایجاد مجموعه‌ای از قوانین جهت کار با اشیاء مذکور

$\Leftarrow$ جـــــــبـــــــر

- جبر خطی
  - مطالعهٔ بردار و قوانین کار با آن

بردار

تعریف ریاضی بردار

- جمع با یکدیگر، منجر به تولید شیِ‌ای هم‌نوع خود
- ضرب در عدد، ایضا

مثال

- بردار هندسی، چندجمله‌ای‌ها، سیگنال صوتی، عضوی از $\mathbb{R}^n$

بستار (بسته بودن)

- از مفاهیم بنیادی ریاضیات
- جهت تقریب ذهن سعی بر پاسخ به «مجموعهٔ تمامی موارد حاصل از عملیات تعریف‌شده چیست؟»
- با داشتن مجموعهٔ کوچکی از بردارها و جمع و مقیاس‌بندی آن‌ها
  - مجموعه بردارهای حاصل چه خواهد بود $\Leftarrow$ فضای بردار
  - از پایه‌های بهینه‌سازی و یادگیری ماشین و جز این‌ها

بردارها

مقادیر حقیقی

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ترانهاده

$$\boldsymbol{x}^T = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]$$

$$\boldsymbol{x} \geq 0 \equiv \forall i, i = 1,2, \dots, n\text{:}\ x_i \geq 0$$

ضرب داخلی بردارها

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$$

ضرب داخلی

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} \geq 0$$

- دارای ویژگی‌های جابجاپذیری، شرکت‌پذیری ضرب تک عدد (اسکالر)، توزیع‌پذیری جمع برداری
- دارای خواصی چون $\boldsymbol{e}_i^T \boldsymbol{x} = x_i$، $\underline{۱}^T \boldsymbol{x} = x_۱ + \cdots + x_n$،
  - میانگین، جمع مربعات، جمع انتخابی؟

ضرب خارجی

$$\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^T = C, \qquad c_{ij} = y_i x_j$$

دستگاه معادلات خطی

بخش اصلی جبر خطی

مدل‌سازی بسیاری از مسائل با معادلات خطی

- جبر خطی $\Leftarrow$ تحویل ابزار حل مسائل مذکور

دستگاه معادلات خطی – مثال

کارگاهی

- تولید n محصول N_1 تا N_n
- جهت تولید محصولات نیاز به m ماده اولیهٔ R_1 تا R_m
- نیاز به تخصیص a_{ij} واحد از هر ماده R_i جهت تولید هر واحد از N_j
  - $i = 1, \ldots, m$
  - $j = 1, \ldots, n$
- از هر محصول b_i واحد موجود
- هدف: یافتن طرح بهینهٔ تولید

حل:

- x_1 تا x_n واحد از هر محصول
- میزان نیاز کلی به هر ماده اولیه R_i

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$$

دستگاه معادلات خطی – مثال - ادامه

تدوین:

- x_1 تا x_n واحد از هر محصول
- میزان نیاز کلی از ماده R_i

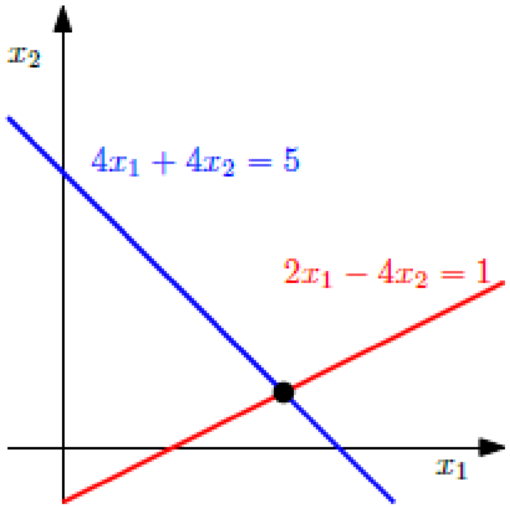
$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$$
$$(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$$

- هر تولید بهینه از ماده R_i باید برآورده‌گر دستگاه معادلات زیر باشد:

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$
$$a_{ij} \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}$$

- صورت عمومی دستگاه معادلات خطی
- x_1 تا x_n مجهول‌ها
- راه‌حل: هر $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ که پاسخ دستگاه باشد.

دستگاه معادلات خطی – مثال - ادامه



تعداد راه‌حل‌ها

- هیچ
- دقیقا یکی
- بی‌نهایت
  - چرا؟
- راه‌حل: هر $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ که پاسخ دستگاه باشد.

حل دستگاه معادلات خطی

نمایش برداری ضرائب

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

تجمیع در ماتریس

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ماتریس

- نمایش موجز دستگاه معادلات خطی
- نمایش توابع خطی (نگاشت‌های خطی)
- $m \times \mathrm{n}$-تائی اعضای a_{ij}
  - $i = 1, \ldots, m$
  - $j = 1, \ldots, n$

حل دستگاه معادلات خطی

$$\begin{aligned} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 \quad - 0.1x_2 \quad - 0.2x_3 &= 7.85 \\ 7.00333x_2 - 0.293333x_3 &= -19.5617 \\ -0.190000x_2 + 10.0200x_3 &= 70.6150 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 \quad - 0.1x_2 \quad - 0.2x_3 &= 7.85 \\ 7.00333x_2 - 0.293333x_3 &= -19.5617 \\ 10.0120x_3 &= 70.0843 \end{aligned}$$

$$x_3 = \frac{70.0843}{10.0120} = 7.0000$$

$$7.00333x_2 - 0.293333(7.0000) = -19.5617$$

$$x_2 = \frac{-19.5617 + 0.293333(7.0000)}{7.00333} = -2.50000$$

$$3x_1 - 0.1(-2.50000) - 0.2(7.0000) = 7.85$$

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1(-2.50000) + 0.2(7.0000)}{3} = 3.00000$$

مثال

$$
\begin{aligned}
۳x_{۱} - ۰.۱x_{۲} - ۰.۲x_{۳} &= ۷.۸۵ \\
۰.۱x_{۱} + ۷x_{۲} - ۰.۳x_{۳} &= -۱۹.۳ \\
۰.۳x_{۱} - ۰.۲x_{۲} + ۱۰x_{۳} &= ۷۱.۴
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} ۳ & -۰.۱ & -۰.۲ & ۷.۸۵ \\ ۰.۱ & ۷ & -۰.۳ & -۱۹.۳ \\ ۰.۳ & -۰.۲ & ۱۰ & ۷۱.۴ \end{bmatrix}
\begin{matrix} \\ R_{۲} - ۱/۳۰\ R_{۱} \\ R_{۳} - ۱/۱۰ R_{۱} \end{matrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} ۳ & -۰.۱ & -۰.۲ & ۷.۸۵ \\ 0 & ۷.۰۰۳۳۳ & -۰.۲۹۳۳۳۳ & -۱۹.۵۶۱۷ \\ 0 & -۰.۱۹ & ۱۰.۰۲ & ۷۰.۶۱۵ \end{bmatrix}
R_{۳} + \frac{۰.۱۹}{۷.۰۰۳۳} R_{۲}
$$

$$
\begin{bmatrix} ۳ & -۰.۱ & -۰.۲ & ۷.۸۵ \\ 0 & ۷.۰۰۳۳۳ & -۰.۲۹۳۳۳۳ & -۱۹.۵۶۱۷ \\ 0 & 0 & ۱۰.۰۱۲ & ۷۰.۰۸۴۳ \end{bmatrix}
\frac{۱}{۱۰.۰۱۲} R_{۳}
$$

$$
\begin{bmatrix} ۳ & -۰.۱ & -۰.۲ & ۷.۸۵ \\ 0 & ۷.۰۰۳۳۳ & -۰.۲۹۳۳۳۳ & -۱۹.۵۶۱۷ \\ 0 & 0 & ۱ & ۷.۰۰۰۰ \end{bmatrix}
$$

حل دستگاه معادلات خطی- تبدیلات ساده

روش عمومی

ماتریس‌ها نمایش موجز دستگاه معادلات خطی

حل معادلات خطی بسته به تبدیلات ابتدایی

عدم تغییر در پاسخ ولی تبدیل دستگاه معادلات به حالت ساده‌تر

- تغییر جای دو معادله (ردیف‌ها در نمایش ماتریسی)
- ضرب معادله‌ای (ردیفی) با مقدار ثابتی به جز صفر
- جمع دو معادله (ردیف)

تبدیلات ساده- ادامه

محور

- مقدار عددی شروع هر ردیف
- اولین عدد غیرصفر از چپ
- همیشه در سمت راست نسبت به ردیف بالاتر

صورت ردیف-پلکانی

- تمامی ردیف‌های کف ماتریس صرفا دارای درایه‌های صفر
- با توجه به ردیف‌های غیرصفر، اولین عدد غیرصفر از سمت چپ (محورها)
  - همیشه در سمت راست محور ردیف بالاتر

- متغیرهای پایه و آزاد
  - پایه: محورها
  - آزاد: بقیه متغیرها

صورت ردیف پلکانی کاهیده

دارای صورت ردیف‌پلکانی

تمامی محورها برابر ۱

محورها تنها درایه‌های غیرصفر در هر ستون

مثال

$$\begin{aligned} y - ۴z &= ۸ \\ ۲x - ۳y + ۲z &= ۱ \\ ۴x - ۸y + ۱۲z &= ۱ \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & ۱ & -۴ & ۸ \\ ۲ & -۳ & ۲ & ۱ \\ ۴ & -۸ & ۱۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & ۲ & ۱ \\ 0 & ۱ & -۴ & ۸ \\ ۴ & -۸ & ۱۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & ۲ & ۱ \\ 0 & ۱ & -۴ & ۸ \\ 0 & -۲ & ۸ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & ۲ & ۱ \\ 0 & ۱ & -۴ & ۸ \\ 0 & 0 & 0 & ۱۵ \end{bmatrix}$$

سازگار نیست و پاسخی ندارد.

حذف گاوس

الگوریتم به‌کارگیری تبدیلات ساده

تبدیل دستگاه معادلات خطی به صورت ردیف‌پلکانی کاهیده

شامل دو مرحله

- حذف جلورو
- جاگذاری رو به عقب

مثال

$$\begin{bmatrix} ۱ & 0 & -۵ & ۱ \\ 0 & ۱ & ۱ & ۴ \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x \quad - ۵z &= ۱ \\ y + z \quad &= ۴ \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = ۵z + ۱ \\ y = -z + ۴ \\ z \text{ متغیر آزاد} \end{cases}$$

مثال

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۶ & ۲ & -۵ & -۲ & -۴ \\ 0 & 0 & ۲ & -۸ & -۱ & ۳ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ۱ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۶ & ۲ & -۵ & 0 & ۱۰ \\ 0 & 0 & ۲ & -۸ & 0 & ۱۰ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ۱ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۶ & ۲ & -۵ & 0 & ۱۰ \\ 0 & 0 & ۱ & -۴ & 0 & ۵ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ۱ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۶ & 0 & ۳ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ۱ & -۴ & 0 & ۵ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ۱ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_۱ + ۶x_۲ + ۳x_۴ &= 0 \\ x_۳ - ۴x_۴ &= ۵ \\ x_۵ &= ۷ \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_۱ = -۶x_۲ - ۳x_۴ \\ x_۲ \text{ آزاد} \\ x_۳ = ۵ + ۴x_۴ \\ x_۴ \text{ آزاد} \\ x_۵ = ۷ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_۱ = -۶a - ۳b \\ x_۲ = a \\ x_۳ = ۵ + ۴b \\ x_۴ = b \\ x_۵ = ۷ \end{cases}$$

مثال-

$$\begin{aligned}
-۲x_۱ + ۴x_۲ - ۲x_۳ - x_۴ + ۴x_۵ &= -۳\\
۴x_۱ - ۸x_۲ + ۳x_۳ - ۳x_۴ + x_۵ &= ۲\\
x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ - x_۴ + x_۵ &= 0\\
x_۱ - ۲x_۲ - ۳x_۴ + ۴x_۵ &= a
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c l}\left[\begin{array}{cccccc} -۲ & ۴ & -۲ & -۱ & ۴ & -۳\\ ۴ & -۸ & ۳ & -۳ & ۱ & ۲\\ ۱ & -۲ & ۱ & -۱ & ۱ & 0\\ ۱ & -۲ & 0 & -۳ & ۴ & a\end{array}\right] & \begin{array}{l} R_۳ \text{ تغییر با}\\ \\ R_۱ \text{ تغییر با}\\ \\ \end{array}\end{array}$$

$$\begin{array}{c l}\left[\begin{array}{cccccc} ۱ & -۲ & ۱ & -۱ & ۱ & 0\\ ۴ & -۸ & ۳ & -۳ & ۱ & ۲\\ -۲ & ۴ & -۲ & -۱ & ۴ & -۳\\ ۱ & -۲ & 0 & -۳ & ۴ & a\end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ R_۲ - ۴R_۱\\ R_۳ + ۲R_۱\\ R_۴ - R_۱\end{array}\end{array}$$

$$\begin{array}{c l}\left[\begin{array}{cccccc} ۱ & -۲ & ۱ & -۱ & ۱ & 0\\ 0 & 0 & -۱ & ۱ & -۳ & ۲\\ 0 & 0 & 0 & -۳ & ۶ & -۳\\ 0 & 0 & -۱ & -۲ & ۳ & a\end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \\ R_۴ - R_۲ - R_۳\end{array}\end{array}$$

$$\begin{array}{c l}\left[\begin{array}{cccccc} ۱ & -۲ & ۱ & -۱ & ۱ & 0\\ 0 & 0 & -۱ & ۱ & -۳ & ۲\\ 0 & 0 & 0 & -۳ & ۶ & -۳\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+۱\end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \times(-۱)\\ \times(-۱/۳)\\ \\ \end{array}\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} ۱ & -۲ & ۱ & -۱ & ۱ & 0\\ 0 & 0 & ۱ & -۱ & ۳ & -۲\\ 0 & 0 & 0 & ۱ & -۲ & ۱\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+۱\end{array}\right]$$

$$\begin{aligned}
x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ - x_۴ + x_۵ &= 0\\
x_۳ - x_۴ + ۳x_۵ &= -۲\\
x_۴ - ۲x_۵ &= ۱\\
0 = a + ۱ \Longrightarrow a &= -۱
\end{aligned}$$

یافتن پاسخ

$$x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ - x_۴ + x_۵ = 0$$
$$x_۳ - x_۴ + ۳x_۵ = -۲$$
$$x_۴ - ۲x_۵ = ۱$$
$$0 = a + ۱$$

$x_۱ = ۲x_۲ - x_۳ + x_۴ - x_۵$
$x_۲$ متغیر آزاد
$x_۳ = x_۴ - ۳x_۵ - ۲$
$x_۴ = ۲x_۵ + ۱$
$x_۵$ متغیر آزاد

$x_۱ = ۲x_۲ - x_۳ + x_۴ - x_۵$
$x_۲$ متغیر آزاد
$x_۳ = -x_۵ - ۱$
$x_۴ = ۲x_۵ + ۱$
$x_۵$ متغیر آزاد

$x_۱ = ۲x_۲ + ۲x_۵ + ۲$
$x_۲$ متغیر آزاد
$x_۳ = -x_۵ - ۱$
$x_۴ = ۲x_۵ + ۱$
$x_۵$ متغیر آزاد

$$\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \\ x_۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_۲ + \begin{bmatrix} ۲ \\ 0 \\ -۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} x_۵ + \begin{bmatrix} ۲ \\ 0 \\ -۱ \\ ۱ \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \\ x_۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} ۲ \\ 0 \\ -۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} ۲ \\ 0 \\ -۱ \\ ۱ \\ 0 \end{bmatrix}$$

مثال

$$\begin{aligned} ۲x + ۴y + ۳z &= ۲ \\ x + ۲y + z \quad &= ۳ \\ ۳x + ۶y + z &= ۱۷ \end{aligned}$$

ماتریس‌ها

مقادیر حقیقی

$X \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$X = \begin{bmatrix} x_{۱۱} & \cdots & x_{۱n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m۱} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

جمع ماتریس‌ها

$\mathrm{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}, Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$\mathrm{X} + Y = \begin{bmatrix} x_{11} + y_{11} & \cdots & x_{1n} + y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} + y_{m1} & \cdots & x_{mn} + y_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

ضرب ماتریس‌ها

$X \in \mathbb{R}^{m\times n}, Y \in \mathbb{R}^{n\times k}$

$$Z = XY \in \mathbb{R}^{m\times k}$$
$$z_{ij} = \sum_{l=1}^{n} x_{il} y_{lj}$$

لزوم برابری بعدهای همسایه

ضرب جزء‌به‌جزء یا ضرب هدامرد

ضرب کرانکر

ضرب خاتری-تائو

ضرب ماتریس‌ها- ویژگی

$XY \neq YX$

قطر ماتریس $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$

- شامل اعضای $X_{ii} \quad i = 1,2,\dots,\min(m,n)$

ماتریس قطری $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$

- شامل اعضای $X_{ij} = 0, i \neq j$

ماتریس همانی

- $\mathbb{R}^{n\times n}$

$$\boldsymbol{I}_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\mathrm{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}, Y \in \mathbb{R}^{n\times p}, Z \in \mathbb{R}^{p\times q}: (XY)Z = X(YZ)$$

$$\mathrm{X}, Y \in \mathbb{R}^{m\times n}, Z, W \in \mathbb{R}^{n\times p}: \begin{cases} (X+Y)Z = XZ + YZ \\ X(Z+W) = XZ + XW \end{cases}$$

$$\mathrm{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}: I_m X = X I_n = X$$

معکوس ماتریس

$X \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- $YX = XY = I$ و $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- Y معکوس X و نمایش با $X^{-۱}$
- همه ماتریس‌ها معکوس‌پذیر نیستند
  - معکوس‌پذیر/ غیرتکین
  - معکوس‌ناپذیر/تکین

مثال

$$X = \begin{bmatrix} x_{۱۱} & x_{۱۲} \\ x_{۲۱} & x_{۲۲} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{۲\times۲}$$

معکوس X برابر با $X^{-۱} = \frac{۱}{x_{۱۱}x_{۲۲}-x_{۱۲}x_{۲۱}} \begin{bmatrix} x_{۲۲} & -x_{۱۲} \\ -x_{۲۱} & x_{۱۱} \end{bmatrix}$

- اگر و فقط اگر $x_{۱۱}x_{۲۲} - x_{۱۲}x_{۲۱} \neq 0$

معکوس ماتریس با روش حذف گاوس

$$[X|I_n] \rightarrow \cdots \rightarrow [I_n|X^{-۱}]$$

ترانهادهٔ ماتریس

$X \in \mathbb{R}^{m\times n}$

- $Y \in \mathbb{R}^{n\times m}$ و $y_{ij} = x_{ji}$
- Y ترانهادهٔ X و نمایش با X^T
- جابجائی سطرها با ستون‌ها

ویژگی‌های اعمال معکوس و ترانهاده

- $XX^{-۱} = X^{-۱}X = I$
- $(XY)^{-۱} = Y^{-۱}X^{-۱}$
- $(X+Y)^{-۱} \neq X^{-۱} + Y^{-۱}$
- $(X^T)^T = X$
- $(X+Y)^T = X^T + Y^T$
- $(XY)^T = Y^T X^T$

ماتریس متقارن

$X \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- $\mathrm{X} = X^T$

- $(X^{-۱})^T = (X^T)^{-۱} = X^{-T}$
- معکوس X^T برابر با ترانهادهٔ $X^{-۱}$
- جمع ماتریس متقارن؟
- ضرب دو ماتریس متقارن؟

ضرب عدد در ماتریس

$X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $Y \in \mathbb{R}^{n\times k}$ و $\lambda,\psi \in \mathbb{R}$

- $\lambda X = K$ و $k_{ij} = \lambda x_{ij}$

$$(\lambda\psi)X = \lambda(\psi X)$$
$$\lambda(XY) = (\lambda X)Y = X(\lambda Y) = (XY)\lambda$$
$$(\lambda X)^T = X^T\lambda^T = X^T\lambda = \lambda X^T$$
$$(\lambda + \psi)X = \lambda X + \psi X$$
$$\lambda(\mathrm{X} + \mathrm{Y}) = \lambda \mathrm{X} + \lambda Y$$

ماتریس‌ها

ماتریس پائین‌مثلثی $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$

- شامل اعضای X_{ij} $i > j$
- تمامی اعضای بالا قطر صفر

ماتریس بالامثلثی $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$

- شامل اعضای X_{ij} $i < j$
- تمامی اعضای پائین قطر صفر

ماتریس متعامد Q

- $QQ^T = Q^T Q = I$

رد(اثر) ماتریس

$$tr[X] = \sum_{i=1}^{n} x_{ii}$$

گروه‌ها

گروه‌ها

داری نقش مهم در علم رایانه

رمزنگاری، نظریه اطلاعات، و گرافیک

تعریف مجموعه $\mathcal{G}$ و عمل $\otimes: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ تعریفی روی این مجموعه، آن‌گاه $G := (\mathcal{G}, \otimes)$ گروه است اگر:

۱- بسته‌بودن $\forall x,y \in \mathcal{G}: x \otimes y \in \mathcal{G}$

۲- شرکت‌پذیری $\forall x,y,z \in \mathcal{G}: (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$

۳- عضو خنثی $\exists e \in \mathcal{G} \forall x \in \mathcal{G}: x \otimes e = e \otimes x = x$

۴- عضو معکوس $\forall x \in \mathcal{G} \exists y \in \mathcal{G}: x \otimes y = y \otimes x = e$

گروه آبلی

تعریف مجموعه $\mathcal{G}$ و عمل $\otimes : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ تعریفی روی این مجموعه، آن‌گاه $G \coloneqq (\mathcal{G}, \otimes)$ گروه آبلی است اگر:

۱-بسته‌بودن $\forall x,y \in \mathcal{G} : x \otimes y \in \mathcal{G}$

۲- شرکت‌پذیری $\forall x,y,z \in \mathcal{G} : (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$

۳- عضو خنثی $\exists e \in \mathcal{G} \forall x \in \mathcal{G} : x \otimes e = e \otimes x = x$

۴- عضو معکوس $\forall x \in \mathcal{G} \exists y \in \mathcal{G} : x \otimes y = y \otimes x = e$

۵- جابجاپذیری $\forall x,y \in \mathcal{G} : x \otimes y = y \otimes x$

فضای برداری

تعریف

فضای بردار مقدار حقیقی $(\nu, +, \cdot)$ مجموعه‌ای است با دو عملیات:
$+: \nu \times \nu \to \nu$
$\cdot: \mathbb{R} \times \nu \to \nu$

به‌طوری‌که

۱- $(\nu, +)$ آبلی است

۲- توزیع‌پذیری

- الف- $\forall \lambda \in \mathbb{R};\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in v: \lambda.(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \lambda.\boldsymbol{x} + \lambda.\boldsymbol{y}$
- ب- $\forall \lambda,\psi \in \mathbb{R}; \boldsymbol{x} \in v: (\lambda+\psi).\boldsymbol{x} = \lambda.\boldsymbol{x} + \psi.\boldsymbol{x}$

۳- شرکت‌پذیری $\forall \lambda,\psi \in \mathbb{R}; \boldsymbol{x} \in v: \lambda.(\psi.\boldsymbol{x}) = (\lambda\psi).\boldsymbol{x}$

۴- عضو خنثی $\forall \boldsymbol{x} \in v: 1.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

زیرفضای برداری

تعریف

زیر فضای بردار مقدار حقیقی $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ مجموعه‌ای است دارای خواص زیر است:

$$\mathbf{0} \in S$$

$$+: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$

$$\cdot: \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$

زیرفضا

$A: m \times n$

$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

معادله همگن

$$N = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

- زیرفضا؟

- $A\mathbf{0} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{0} \in N$
- $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in N \Longrightarrow \begin{Bmatrix} A\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0} \\ A\boldsymbol{v_2} = \mathbf{0} \end{Bmatrix} \Longrightarrow A(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v_2}) = A\boldsymbol{v}_1 + A\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} \in N$
- $\boldsymbol{v_1} \in N \Longrightarrow A(c\boldsymbol{v_1}) = cA(\boldsymbol{v_1}) = c\mathbf{0} = \mathbf{0} \Longrightarrow c\boldsymbol{v_1} \in N$

- N فضای پوچ A

استقلال خطی

ترکیب خطی

- فضای برداری V و تعدادی متناهی بردارهای $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k \in V$ را فرض می‌کنیم. آن‌گاه، به ازای $\boldsymbol{v} \in V$

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{x}_i \in V$$

به طوری که $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$، ترکیبی خطی از بردارهای $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ است.

وابستگی و استقلال خطی:

- $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k \in V$
- وابستگی خطی - اگر ترکیب موجود باشد که $\boldsymbol{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{x}_i$، به طوری که حداقل یکی از $\lambda_i \neq 0$
- استقلال خطی- در صورتی که $\boldsymbol{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{x}_i$، ترکیبی نامهم باشد.
  - به سخن دیگر، تمامی ضرائب برابر صفر

استقلال خطی - ادامه

روش بررسی وابستگی خط‌ها

- استفاده از حذف گاوس
- نوشتن تمامی بردارها به مثابهٔ ستون‌های ماتریس
- اجرای حذف گاوس تا رسیدن به صورت ردیف-پلکانی
  - ستون‌های محور نشانگر بردارهای مستقل
  - ستون‌های غیرمحور بردارهای وابسته و ترکیبی از ستون‌های محور

استقلال خطی – ادامه

روش بررسی وابستگی خط‌ها

- استفاده از حذف گاوس
- نوشتن تمامی بردارها به مثابهٔ ستون‌های ماتریس
- اجرای حذف گاوس تا رسیدن به صورت ردیف-پلکانی
  - ستون‌های محور نشانگر بردارهای مستقل
  - ستون‌های غیرمحور بردارهای وابسته و ترکیبی از ستون‌های محور

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & 0 \\ 0 & 0 & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ & -۲ \\ -۳ & 0 & ۱ \\ ۴ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ \\ 0 & ۱ & 0 \\ 0 & 0 & ۱ \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

استقلال خطی - ادامه

مثال

$$\begin{bmatrix} ۱ & 0 & ۲ \\ ۲ & ۱ & 0 \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۴ & ۱ & ۷ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & 0 & ۲ \\ 0 & ۱ & -۴ \\ 0 & ۱ & -۱ \\ 0 & ۱ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & 0 & ۲ \\ 0 & ۱ & -۴ \\ 0 & ۱ & -۱ \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & 0 & ۲ \\ 0 & ۱ & -۴ \\ 0 & 0 & ۳ \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

استقلال خطی - ادامه

پایه‌های فضا

- بردارهای مستقلی که فضا را پوشش می‌دهند.

پایه‌های بندادی (کانونی) فضای $\mathbb{R}^3$

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

- دیگر پایه‌ها

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}، \quad \left\{\begin{bmatrix}0.5\\0.8\\0.4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1.8\\0.3\\0.3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2.2\\-1.3\\3.5\end{bmatrix}\right\}$$

بعد فضا

- تعداد بردارهای پایه فضا

پایه و رتبه

رتبه

- Rank
- نمایش با ρ
- برابر است با تعداد ستون‌های مستقل ماتریس
  - که خود برابر است با تعداد ردیف‌های مستقل آن

ویژگی‌ها

- $\rho(A) = \rho(A^T)$
- بعد زیرفضای پوشش داده شده با ماتریس برابر با رتبه ماتریس
- یافتن پایه‌ها با اعمال حذف گاوس
- $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ معکوس‌پذیر است اگر فقط اگر $\rho(X) = n$
- $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ حل‌پذیر اگر و فقط اگر $\rho(A) = \rho(A|\boldsymbol{b})$
- $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$، آن‌گاه $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ دارای بعد $\mathrm{n} - \rho(A)$
  - معروف به فضای پوچ
- $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ رتبه‌تمام اگر رتبه برابر با بزرگترین رتبه ممکن باشد: $\rho(X) = \min(m,n)$
- $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ رتبه‌تمام اگر دترمینان برابر مقدار غیرصفر
- $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T$: رتبه-یک

پایه و رتبه – ادامه

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & 0 & ۱ \\ 0 & ۱ & ۱ \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

چهار زیرفضای بنیادی

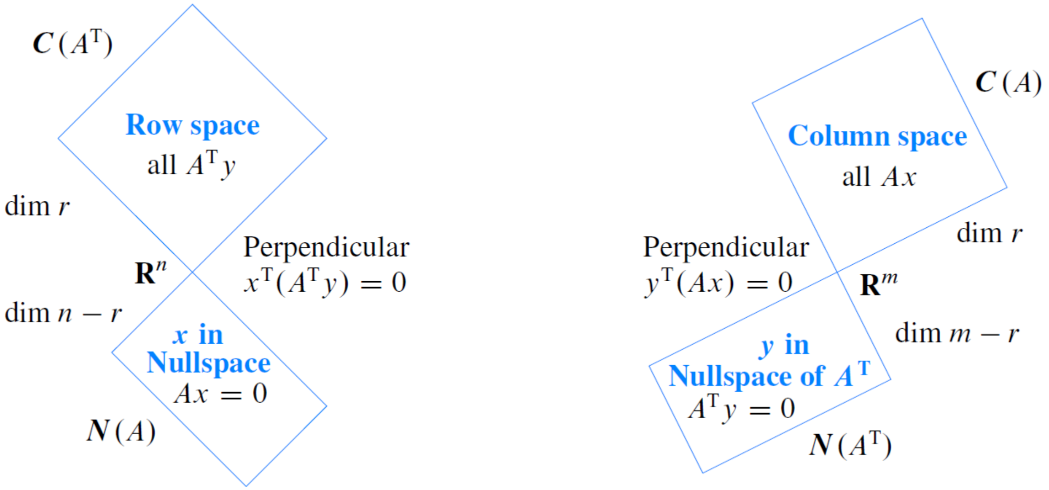


Figure 1: Dimensions and orthogonality for any m by n matrix A of rank r.

ماتریس $A_{m\times n}$

شامل فضای ستون و فضای پوچ A و A^T

جهت فهم در سطح بالاتر $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

قدم اول $A\boldsymbol{x}$ ترکیبی از ستون‌های A

- بردارهای پرکنندهٔ فضای ستون A، $C(A)$
- $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ **دارای پاسخ در صورتی که** $\boldsymbol{b}$ در فضای ستون A

ارتباط چهار زیرفضا در قالب «قضیه اساسی جبر خطی»

- استرانگ

محاسبهٔ فضای پوچ

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^۴ | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & 0 \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & 0 \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & 0 \\ 0 & ۱ & ۲ & ۳ & 0 \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & 0 \\ 0 & ۱ & ۲ & ۳ & 0 \\ 0 & -۱ & -۲ & -۳ & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & 0 & -۱ & -۲ & 0 \\ 0 & ۱ & ۲ & ۳ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ - x_۳ - ۲x_۴ = 0 \\ x_۲ + ۲x_۳ - ۳x_۴ = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = x_۳ + ۲x_۴ \\ x_۲ = -۲x_۳ + ۳x_۴ \end{cases}$$

فضای پوچ و فضای ستون

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c(A) = span(\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۴ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ ۲ \end{bmatrix})$$

$$N(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^۴ | A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & 0 & -۱ & -۲ & 0 \\ 0 & ۱ & ۲ & ۳ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = x_۳ + ۲x_۴ \\ x_۲ = -۲x_۳ + ۳x_۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \end{bmatrix} = x_۳ \begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \\ ۱ \\ 0 \end{bmatrix} + x_۴ \begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \\ 0 \\ ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow N(A) = span(\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \\ ۱ \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \\ 0 \\ ۱ \end{bmatrix})$$

فضای پوچ و فضای ستون

$$A=\begin{bmatrix}۱&۱&۱&۱\\۱&۲&۳&۴\\۴&۳&۲&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\x_۲\\x_۳\\x_۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$c(A)=span(\begin{bmatrix}۱\\۲\\۳\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۱\\۱\\۴\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۱\\۴\\۱\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۱\\۳\\۲\end{bmatrix})$$

$$N(A)=span(\begin{bmatrix}۱\\-۲\\۱\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۲\\-۳\\0\\۱\end{bmatrix})$$

شرط استقلال خطی $\Leftrightarrow N(A)=\{\mathbf{0}\}$

- ستون‌های فضای ستون، پایه‌ها نیستند

فضای پوچ و فضای ستون

$$x_۱ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} + x_۲ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۴ \end{bmatrix} + x_۳ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \\ ۱ \end{bmatrix} + x_۴ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$x_۳ = 0 \Rightarrow x_۱ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} + x_۲ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۴ \end{bmatrix} = -x_۴ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}, x_۴ = -۱ \Rightarrow x_۱ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} + x_۲ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow x_۱ = ۲, x_۲ = -۱$$

$$x_۴ = 0 \Rightarrow x_۱ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} + x_۲ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۴ \end{bmatrix} = -x_۳ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۴ \end{bmatrix}, x_۳ = -۱ \Rightarrow x_۱ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} + x_۲ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \\ ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow x_۱ = ۳, x_۲ = -۲$$

پس امکان تغییر پوشش فضای ستون

$$c(A) = span(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix})$$

مثال- چهار فضا

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فضای ستون $C(A) = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

فضای ردیف $C(A^T) = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\4\\5\end{bmatrix}\right\}$

فضای ترانهاده پوچ $N(A^T) = \left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

فضای پوچ $N(A) = \left\{\begin{bmatrix}-2\\-4\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\-5\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

چهار فضای $A_{m\times n}$

فضای ردیف عمود بر فضای پوچ

$$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{ردیف ۱} \\ \cdots \\ \text{ردیف } m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{x}$ عمود بر ردیف ۱
- …
- $\boldsymbol{x}$ عمود بر ردیف m

فضای ستون عمود بر فضای ترانهادۀ پوچ

- **هر بردار $\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{x}$ عمود بر هر راه حل $\boldsymbol{A^T y}=\mathbf{0}$**
- $(A\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}(A^T\boldsymbol{y})=0$

فضای ستون $C(A)$ و فضای ردیف $C(A^T)$ دارای بعد برابر با رتبۀ r

فضای پوچ $\mathrm{N}(A)$ دارای بعد $n-r$

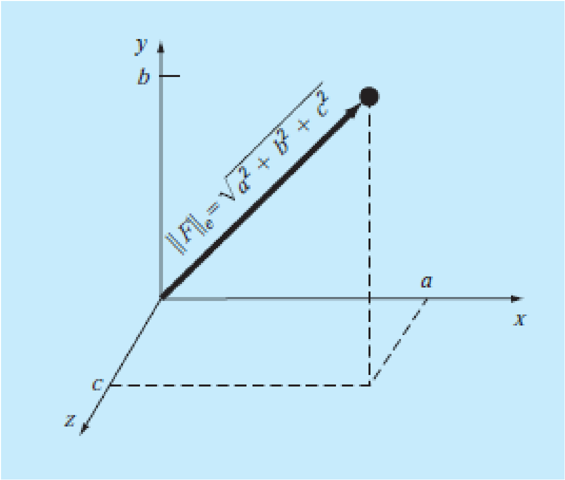
فضای ترانهادۀ پوچ $N(A^T)$ دارای بعد $\mathrm{m}-r$

نُرم

نگاشتی است از فضای n بعدی به عددی نامنفی

اندازه‌گیری طول بردار $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\boldsymbol{x}\|_۱ \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=۱}^{n} |x_i|$$



$$\|\boldsymbol{x}\|_۲ \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} = (\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x})^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i=۱,۲,\ldots,n} |x_i|$$

تناظر آن‌ها با تعاریف محدوده

- $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \le \|\boldsymbol{x}\|_۱ \le n\|\boldsymbol{x}\|_\infty$
- $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \le \|\boldsymbol{x}\|_۲ \le \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_\infty$

نُرم – ادامه

ویژگی‌ها

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{z}\|, \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$$

تساوی اگر و فقط اگر بردارهای $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{z}$ ضریبی از یکدیگر باشند

$$\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$$\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

نُرم - ادامه

نامساوی کوشی-شوارتز

$$|\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{z}| \leq \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{z}\|,$$

تساوی اگر و فقط اگر بردارهای $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{z}$ ضریبی از یکدیگر باشند

نرم ماتریس‌ها

$$\|A\|_۱ \stackrel{\text{def}}{=} \max_{j=۱,۲,\ldots,n} \sum_{i=۱}^{m} |A_{ij}|$$

$$\|A\|_۲ \stackrel{\text{def}}{=} \text{بزرگترین مقدارویژه}(A^T A)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\|A\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i=۱,۲,\ldots,m} \sum_{j=۱}^{n} |A_{ij}|$$

نرم ماتریس‌ها

نرم فروبنیوس

$$\|A\|_F \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} A_{ij}^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

نرم ماتریس‌ها- ویژگی‌ها

$$\|AB\| \le \|A\|\|B\|$$

عدد وضعیت (شرط)

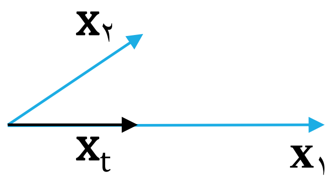
$$\kappa(Q) = \|Q\|\|Q^{-1}\|$$

- $\kappa(Q) = \|Q\|\left\|Q^{-1}\right\|$
  - $\kappa(Q)$ کوچک: «خوش وضعیتی»
  - $\kappa(Q)$ بزرگ: بدوضعیتی!
  - گاهی اوقات امکان تعریف $\kappa(Q)$ با مقادیر ویژه
    - چه مواقعی؟

تصویر (پراجکشن)

$$\cos\theta = \frac{\|x_t\|}{\|x_{۲}\|} \Longrightarrow \|\boldsymbol{x}_t\| = \|\boldsymbol{x}_{۲}\|\cos\theta \; *$$

$$\boldsymbol{x}_{۱}.\boldsymbol{x}_{۲} = \|\boldsymbol{x}_{۱}\|\|\boldsymbol{x}_{۲}\| \cos\theta \; **$$



$$\overset{*}{\Rightarrow} \frac{\|x_{۱}\|}{\|x_{۱}\|} \xrightarrow{\text{ضرب * در}} \|\boldsymbol{x}_t\| = \frac{\|x_{۱}\|\|x_{۲}\|\cos\theta}{\|x_{۱}\|}$$

$$\overset{**}{\Rightarrow} \|\boldsymbol{x}_t\| = \frac{x_{۱}.x_{۲}}{\|x_{۱}\|}$$

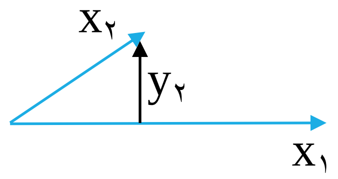
$$\boldsymbol{x}_t = \|\boldsymbol{x}_t\| \frac{x_{۱}}{\|x_{۱}\|} = \frac{x_{۱}.x_{۲}}{\|x_{۱}\|} \frac{x_{۱}}{\|x_{۱}\|} \Longrightarrow \boldsymbol{x}_t = \left(\frac{x_{۱}.x_{۲}}{\|x_{۱}\|^{۲}}\right) \boldsymbol{x}_{۱}$$

روش گرام اشمیت

$\{\boldsymbol{x}_۱,\boldsymbol{x}_۲,\boldsymbol{x}_۳, \dots ,\boldsymbol{x}_k\}$ پایه‌ای برای X

- به دنبال پایه یکه متعامد

- $X_۱ = span(\boldsymbol{x}_۱) \Longrightarrow \boldsymbol{y}_۱ = \frac{\boldsymbol{x}_۱}{\|\boldsymbol{x}_۱\|}$
- $X_۲ = span(\boldsymbol{x}_۱, \boldsymbol{x}_۲) = span(\boldsymbol{y}_۱, \boldsymbol{x}_۲)$
- $\Longrightarrow \boldsymbol{y'}_۲ = \boldsymbol{x}_۲ - \frac{(\boldsymbol{x}_۲.\boldsymbol{y}_۱)\boldsymbol{y}_۱}{\|\boldsymbol{y}_۱\|^۲}, \boldsymbol{y}_۲ = \frac{\boldsymbol{y'}_۲}{\|\boldsymbol{y'}_۲\|} \Longrightarrow X_۲ = span(\boldsymbol{y}_۱, \boldsymbol{y}_۲)$
- $X_۳ = span(\boldsymbol{x}_۱, \boldsymbol{x}_۲, \boldsymbol{x}_۳) = span(\boldsymbol{y}_۱, \boldsymbol{y}_۲, \boldsymbol{x}_۳)$
- $\Longrightarrow \boldsymbol{y'}_۳ = \boldsymbol{x}_۳ - \frac{(\boldsymbol{x}_۳.\boldsymbol{y}_۱)\boldsymbol{y}_۱}{\|\boldsymbol{y}_۱\|^۲} - \frac{(\boldsymbol{x}_۳.\boldsymbol{y}_۲)\boldsymbol{y}_۲}{\|\boldsymbol{y}_۲\|^۲}, \boldsymbol{y}_۳ = \frac{\boldsymbol{y'}_۳}{\|\boldsymbol{y'}_۳\|} \Longrightarrow X_۳ = span(\boldsymbol{y}_۱, \boldsymbol{y}_۲, \boldsymbol{y}_۳)$
- $\vdots$
- $X_k = span(\boldsymbol{x}_۱, \boldsymbol{x}_۲, \boldsymbol{x}_۳, \dots, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}) = span(\boldsymbol{y}_۱, \boldsymbol{y}_۲, \dots, \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{k}-۱}, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}})$
- $\Longrightarrow \boldsymbol{y'}_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}} - \sum_{\boldsymbol{i}=۱}^{\boldsymbol{k}-۱} \frac{(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}.\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}})\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}}{\|\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}\|^۲}, \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{y'}_{\boldsymbol{k}}}{\|\boldsymbol{y'}_{\boldsymbol{k}}\|} \Longrightarrow X_k = span(\boldsymbol{y}_۱, \boldsymbol{y}_۲, \dots, \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{k}})$



تجزیهٔ بالا-پائین ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} = LU$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + U_{22} & L_{21}U_{13} + U_{23} \\ L_{31}U_{11} & L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + U_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{U_{11} = 1}, \quad \boxed{U_{12} = 2}, \quad \boxed{U_{13} = 4}$$

$$L_{21}U_{11} = 3 \quad \therefore L_{21} \times 1 = 3 \quad \therefore \boxed{L_{21} = 3},$$

$$L_{21}U_{12} + U_{22} = 8 \quad \therefore 3 \times 2 + U_{22} = 8 \quad \therefore \boxed{U_{22} = 2},$$

$$L_{21}U_{13} + U_{23} = 14 \quad \therefore 3 \times 4 + U_{23} = 14 \quad \therefore \boxed{U_{23} = 2}$$

$$L_{31}U_{11} = 2 \quad \therefore L_{31} \times 1 = 2 \quad \therefore \boxed{L_{31} = 2},$$

$$L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} = 6 \quad \therefore 2 \times 2 + L_{32} \times 2 = 6 \quad \therefore \boxed{L_{32} = 1},$$

$$L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + U_{33} = 13 \quad \therefore (2 \times 4) + (1 \times 2) + U_{33} = 13 \quad \therefore \boxed{U_{33} = 3}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

تجزیهٔ بالا-پائین ماتریس

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ L_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + U_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

https://learn.lboro.ac.uk/archive/olmp/olmp_resources/pages/workbooks_1_50_jan2008/Workbook30/30_3_lu_decmp.pdf

بررسی وجود تجزیهٔ بالا-پائین ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

تمامی زیرماتریس‌ها معکوس‌پذیر

- دترمینان غیرصفر

$$A_1 = 1, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = 1,$$

$$|A_2| = (1 \times 8) - (2 \times 3) = 2,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 8 & 14 \\ 6 & 13 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 14 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 20 - (2 \times 11) + (4 \times 2) = 6$$

https://learn.lboro.ac.uk/archive/olmp/olmp_resources/pages/workbooks_1_50_jan2008/Workbook30/30_3_lu_decmp.pdf

تجزیه QR

Q بردار متعامد یکه

R ماتریس بالا مثلثی

استفاده از گرم-اشمیت

A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_2' = a_2 - (a_2 . q_1)q_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \frac{q_2'}{3} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}}{3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$q_3' = a_3 - (a_3 . q_1)q_1 - (a_3 . q_2)q_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_3 = \frac{q_3'}{3} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}}{5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

تجزیه QR

Q بردار متعامد یکه

R ماتریس بالا مثلثی

استفاده از گرم-اشمیت

A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

$A = QR$ $\qquad R = Q^T A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$a_1 = 1q_1$

$a_2 = 2q_1 + 3q_2$

$a_3 = 4q_1 + 6q_2 + 5q_3$

تجزیه کولسکی

$$X = \begin{cases} \text{تجزیه پائین مثلثی} \\ \text{تجزیه بالا مثلثی} \end{cases}$$

$$X = X^T, x_{ij} = x_{ji}$$

$$X = \begin{cases} \text{تجزیه پائین مثلثی} \\ \text{ترانهاده تجزیه پائین مثلثی} \end{cases}$$

$$X = LL^T$$

تجزیه کولسکی

X=$\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$

$$X = LL^T$$

$$l_{ki} = \frac{x_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} l_{kj}}{l_{ii}}, \forall i \in \{1,2,\dots,k-1\}$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$$l_{kk} = \sqrt{x_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

Numerical Methods for Engineers, 6th ed, 2009

تجزیه کولسکی

$$l_{ki} = \frac{x_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} l_{kj}}{l_{ii}}, \forall i \in \{1,2,\ldots,k-1\}$$

$$l_{kk} = \sqrt{x_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

$$X = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix}$$

$$k = 1: \{ i = 1: l_{11} = \sqrt{x_{11}} = \sqrt{6} = 2.4495$$

$$k = 2: \begin{cases} i = 1: l_{21} = \dfrac{x_{21}}{l_{11}} = \dfrac{15}{2.4495} = 6.1237 \\ i = 2: l_{22} = \sqrt{x_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{55 - 6.1237^2} = 4.1833 \end{cases}$$

$$k = 3: \begin{cases} i = 1: l_{31} = \dfrac{x_{31}}{l_{11}} = \dfrac{55}{2.4495} = 22.454 \\ i = 2: l_{32} = \dfrac{x_{32} - l_{21} l_{31}}{l_{22}} = \dfrac{225 - 6.1237(22.454)}{4.1833} = 20.917 \\ i = 3: l_{33} = \sqrt{x_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{979 - 22.454^2 - 20.917^2} = 6.1101 \end{cases}$$

Numerical Methods for Engineers, 6th ed, 2009

ماتریس‌ها

ماتریس مثبت معین

- ماتریس مربعی که

$$x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

- روش‌های تشخیص مثبت معینی ماتریس
  - دترمینان کهاد ماتریس
  - محاسبهٔ بردارویژه‌های ماتریس
  - فاکتورگیری کولسکی

ماتریس مثبت نیمه‌معین

$$x^T A x \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

ماتریس‌ها متقارن، مثبت معین

مثال

$$A_۱ = \begin{bmatrix} ۹ & ۶ \\ ۶ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^T A_۱ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_۱ & x_۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۹ & ۶ \\ ۶ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}$$

$$= ۹x_۱^۲ + ۱۲x_۱x_۲ + ۵x_۲^۲$$

$$= (۳x_۱ + ۲x_۲)^۲ + x_۲^۲ > 0$$

مثال

$$A_۱ = \begin{bmatrix} ۹ & ۶ \\ ۶ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^T A_۱ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_۱ & x_۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۹ & ۶ \\ ۶ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}$$

$$= ۹x_۱^۲ + ۱۲x_۱x_۲ + ۳x_۲^۲$$

$$= (۳x_۱ + ۲x_۲)^۲ - x_۲^۲$$

بردار ویژه، مقدار ویژه، تجزیه مقدار-منفرد

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \lambda \in \mathbb{R}$

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n} \backslash \{\boldsymbol{0}\}$

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

- هم‌جهتی: دو بردار نشانگر یک جهت
- هم‌خطی: دو بردار موازی

- فرض $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$A(c\boldsymbol{x}) = cA\boldsymbol{x} = c\lambda\boldsymbol{x} = \lambda(c\boldsymbol{x})$$

پس تمامی بردارهای هم‌جهت $\boldsymbol{x}$ بردارویژه A

بردار ویژه، مقدار ویژه، تجزیه مقدار-منفرد

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \\ |M| = 0\end{array}\right\} M\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$$|A - \lambda I| = \mathbf{0}$$

تجزیه ویژه و قطری‌سازی - مثال

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} ۱ & 0 \\ 0 & ۱ \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} ۲ - \lambda & ۲ \\ ۵ & -۱ - \lambda \end{vmatrix} = (۲ - \lambda)(-۱ - \lambda) - ۱۰ = \lambda^۲ - \lambda - ۱۲ \Rightarrow \begin{cases} \lambda_۱ = -۳ \\ \lambda_۲ = ۴ \end{cases}$$

$$\lambda_۱ = -۳ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \lambda_۱ \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲x_۱ + ۲x_۲ \\ ۵x_۱ - x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳x_۱ \\ -۳x_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲x_۱ + ۲x_۲ = -۳x_۱ \\ ۵x_۱ - x_۲ = -۳x_۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x_۱ + ۲x_۲ = -۳x_۱ \\ ۵x_۱ - x_۲ = -۳x_۲ \end{cases} \Rightarrow ۵x_۱ = -۲x_۲ \Rightarrow p_۱ = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۵ \end{bmatrix}$$

$$\lambda_۲ = ۴ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲x_۱ + ۲x_۲ \\ ۵x_۱ - x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴x_۱ \\ ۴x_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲x_۱ + ۲x_۲ = ۴x_۱ \\ ۵x_۱ - x_۲ = ۴x_۲ \end{cases} \Rightarrow x_۱ = x_۲ \Rightarrow p_۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

بردار ویژه، مقدار ویژه؟

مقدمات بردار/مقدارویژه

- تبدیل خطی
- دترمینان
- دستگاه‌های خطی
- تغییر پایه

بردار ویژه، مقدار ویژه؟

$Ax = \boldsymbol{b}$:

- حل دستگاه معادلات جبری
- نگاشت خطی (تبدیل برداری به بردار دیگر با ترکیب خطی)
  - تبدیل
  - چرخش
  - مقیاس‌بندی
- مسائل استخراج‌پذیر
  - مقدار $\boldsymbol{b}$
  - مقدار $\boldsymbol{x}$
    - $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$
  - تحلیل ماتریس تبدیل
    - نیاز به بردارویژه و مقدارویژه
  - بردارویژه جهتی که ماتریس مانند مقیاس و ضریب عمل می‌کند.
    - مقدار ضریب برابر مقدارویژه

بردار ویژه، مقدار ویژه؟ – ادامه

- بردارویژه جهتی که ماتریس تبدیل جهت را تغییر نمی‌دهد
- با یافتن بردارهای ویژه در ماتریس چرخش
  - یافتن محورهای چرخش

دترمینان ماتریس برابر است با مقداری که ناحیه‌ای را تغییر می‌دهد
- دترمینان برابر با حاصلضرب مقادیر ویژه

به زبان نادقیق
- مقادیر ویژه برابر اعوجاج حاصل از تبدیل است
- بردارهای‌ویژه چگونگی چرخش اعوجاج را ابراز می‌کنند
  - نقطه تلاقی پی‌سی‌ای

آخرین تفسیر
- منطق شکست

بردار ویژه، مقدار ویژه؟ – *ادامه*

کاربردها

- زنجیرهٔ مارکوف و پیاده‌روی تصادفی
- کاهش بعد

تجزیه ویژه و قطری‌سازی

مزایای قطری‌سازی

- راحتی محاسبهٔ دترمینان و توان‌رسانی و معکوس‌گیری

دو ماتریس A و D مشابه اگر

- $D = P^{-۱}AP$

قضیه تجزیه‌ویژه

ماتریس مربع $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را می‌توان به صورت $A = PDP^{-۱}$ تجزیه کرد

- $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ که ستون‌های آن متناظر بردارویژه‌های A
- D ماتریس قطری که درایه‌ها روی قطر برابر مقادیرویژهٔ A هستند
  - مقدار D_{ii} متناظر بردارویژه $\boldsymbol{p_i}$

تجزیه ویژه و قطری‌سازی - ادامه

قضیه

ماتریس متقارن $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ را همیشه می‌توان قطری نوشت.

تجزیه ویژه و قطری‌سازی - مثال

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{۱} = ۱ \\ \lambda_{۲} = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \\ p_{۲} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = [p_{۱}, p_{۲}] \Rightarrow P = \frac{1}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-۱}AP = \begin{bmatrix} ۱ & 0 \\ 0 & ۳ \end{bmatrix} = D$$

$$P^{-۱} = P^T$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & 0 \\ 0 & ۳ \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}}_{P^T}$$

تجزیه ویژه و قطری‌سازی – ویژگی‌ها

$A^k = (PDP^{-۱})^k = PD^kP^{-۱}$

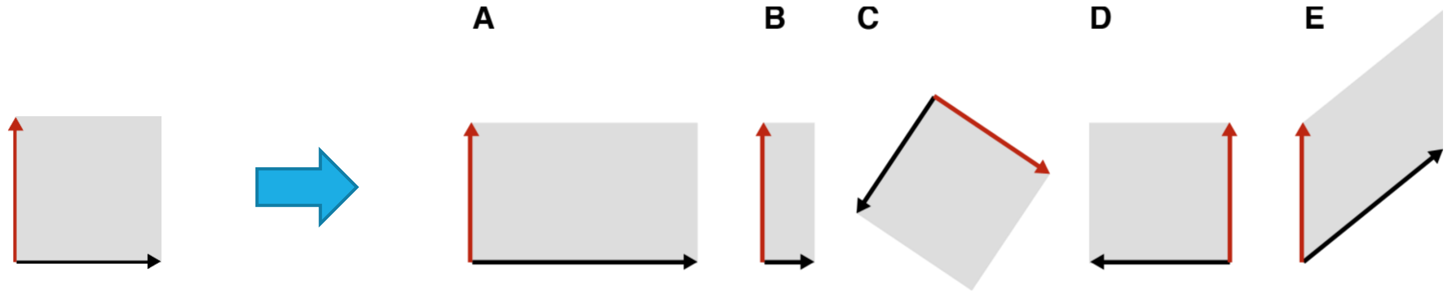
$|A| = \left|PD\ P^{-۱}\right| = |P||D|\left|P^{-۱}\right| = |D| = \prod_i D_{ii} = \prod_i \lambda_i$

$\rho(A) = \rho(D)$

اعمال‌پذیر بر ماتریس‌های مربع

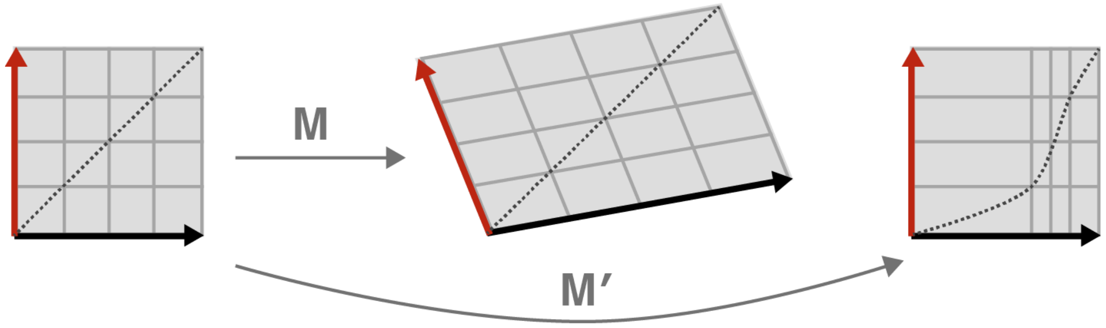
تجزیهٔ مقدار تکین

امکان اعمال هر عملی اعم از کشیدگی،فشردگی یا چرخش بر مربعی



تنها محدودیت

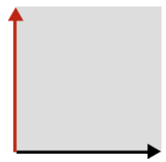
- خطی بودن
  - تقریب ذهن
  - مستقیم باقی ماندن خط مستقیم پس از اعمال با عملیات خطی

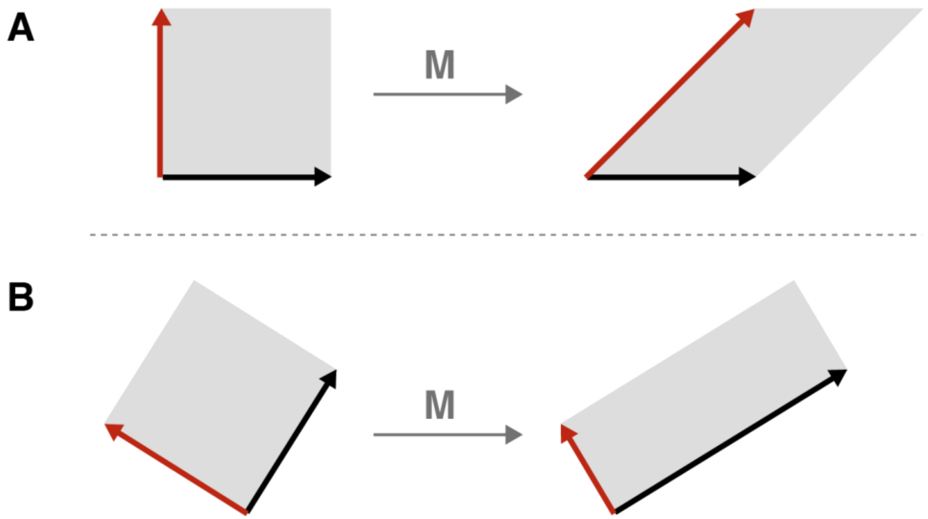


تجزیهٔ مقدار تکین

M تبدیلی خطی روی مربع

- فرض- امکان چرخش مربع پیش از اعمال M
- آن‌گاه امکان یافتن چرخشی که با اعمال چرخش و سپس اعمال M $\Longleftarrow$ تبدیل مربع به مستطیل
  - به بیان دیگر، با چرخش قبل M،ماتریس فعلی صرفا عامل فشردگی یا کشیدگی یا برعکس کردن مربع
  - امکان امتناع و دوری از برشی شدن sheared
  - مثال

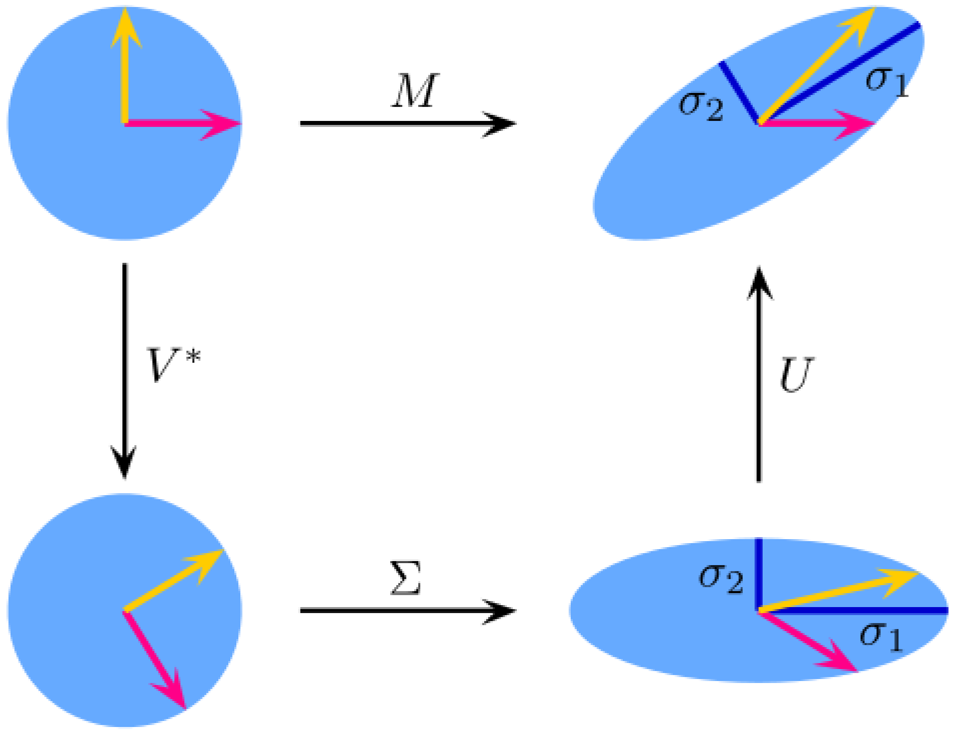




  - جوهر تجزیه مقدار تکین

تجزیهٔ مقدار تکین

M



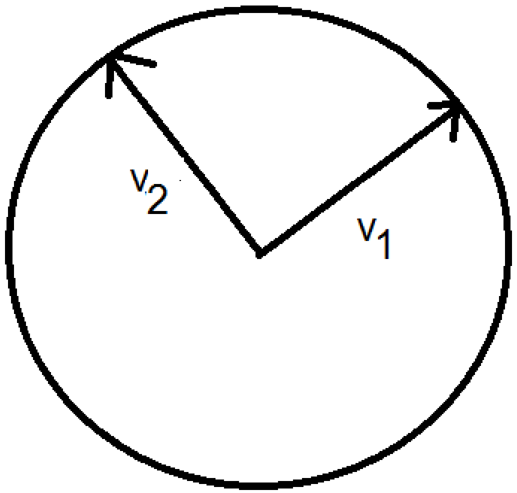
$$M = U \cdot \Sigma \cdot V^*$$

ویکی

تجزیهٔ مقدار تکین

فرض نمایش دایره‌ای با بردارهای عمود بر هم $\boldsymbol{v}_1$ و $\boldsymbol{v}_2$

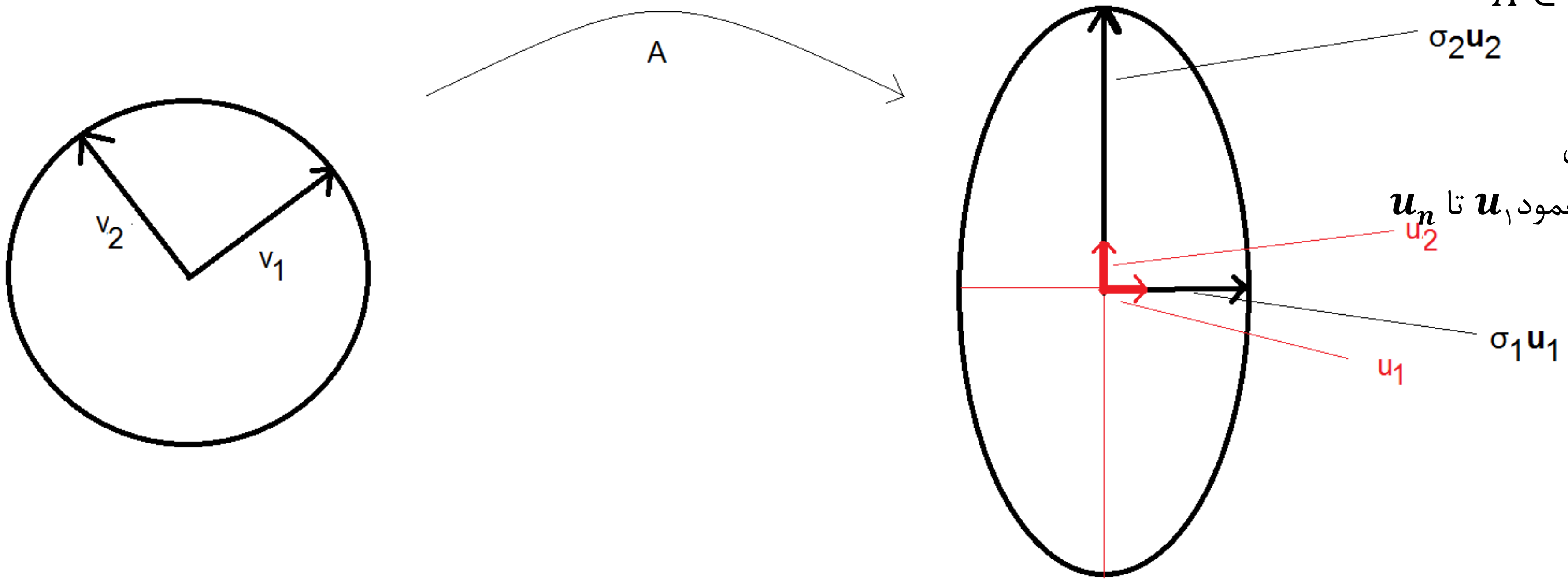
- دوبعدی
- ولی امکان تعمیم **n** بعدی
- فرض ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$
  - با اعمال A چه اتفاقی برای مختصات روبرو خواهد افتاد؟
    - چرخش
    - کشش یا فشردن بردار
  - یکسان برای همه بردارها



تجزیهٔ مقدار تکین

فرض نمایش دایره‌ای با بردارهای عمود بر هم $\boldsymbol{v}_1$ و $\boldsymbol{v}_2$

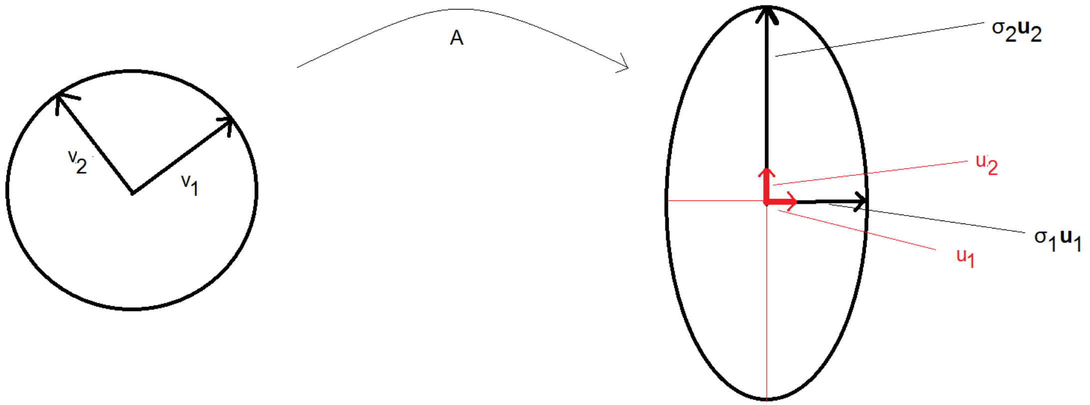
- ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$



تعمیم **n** بعدی

- تبدیل به ابربیضی
- بردارهای نرمال عمود $\boldsymbol{u}_1$ تا $\boldsymbol{u}_n$
  - یکانی
- ضرائب σ_1 تا σ_n
  - مقادیر تکین
  - تاثیر آنها؟

تجزیهٔ مقدار تکین



فرض نمایش دایره‌ای با بردارهای عمود بر هم $\boldsymbol{v}_۱$ و $\boldsymbol{v}_۲$

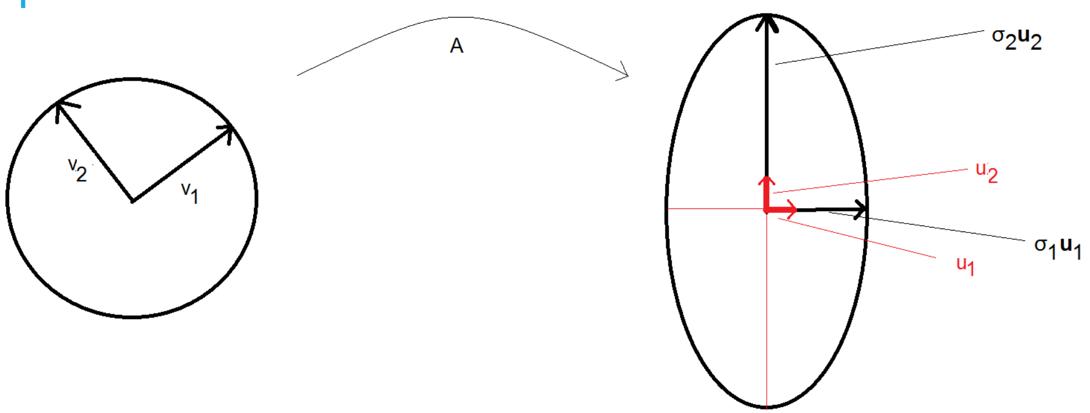
- تعمیم n بعدی
- ماتریس $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$

$$A\boldsymbol{v}_۱ = \sigma_۱\boldsymbol{u}_۱$$
$$A\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}} = \sigma_i\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{i}}, i = ۱,۲,\ldots,n$$

$$A_{m\times n}\,[\boldsymbol{v}_۱\boldsymbol{v}_۲\ldots\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n}}]_{n\times n} = [\boldsymbol{u}_۱\boldsymbol{u}_۲\ldots\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}}]_{m\times n}\begin{bmatrix}\sigma_۱ & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \sigma_n\end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$AV = \hat{U}\hat{\Sigma}$$

تجزیهٔ مقدار تکین



فرض نمایش دایره‌ای با بردارهای عمود بر هم $\boldsymbol{v}_1$ و $\boldsymbol{v}_2$

- تعمیم n بعدی
- ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$AV = \hat{U}\hat{\Sigma}$$

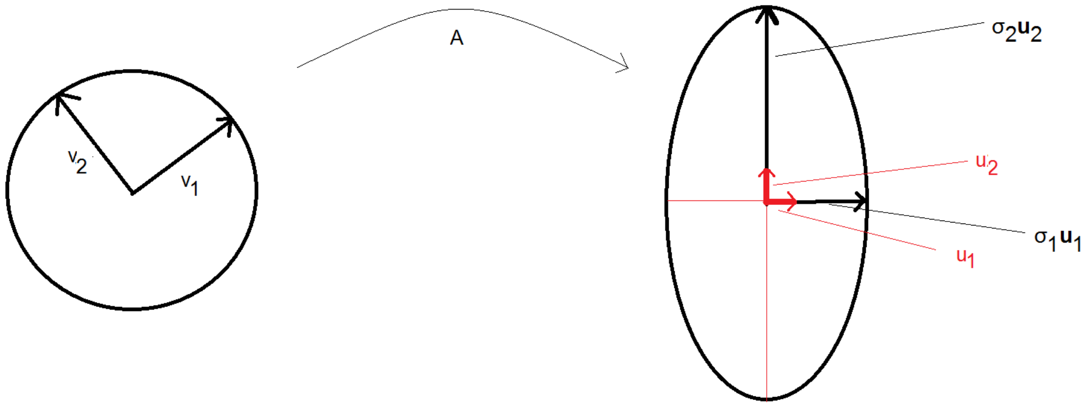
V چرخش (تبدیل یکانی unitary transformation)

- $V^{-1} = V^{T}$

$\hat{\Sigma}$ کشیدن یا فشردن

$\hat{U}$ چرخش

تجزیهٔ مقدار تکین



فرض نمایش دایره‌ای با بردارهای عمود بر هم $\boldsymbol{v}_1$ و $\boldsymbol{v}_2$

- تعمیم n بعدی
- ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$AV = \hat{U}\hat{\Sigma}$$
$$AVV^{-1} = \hat{U}\hat{\Sigma}V^{-1}$$
$$A = \hat{U}\hat{\Sigma}V^{T}$$

تجزیهٔ مقدار تکین کاهیده

تجزیهٔ مقدار تکین

تجزیهٔ مقدار تکین کاهیده

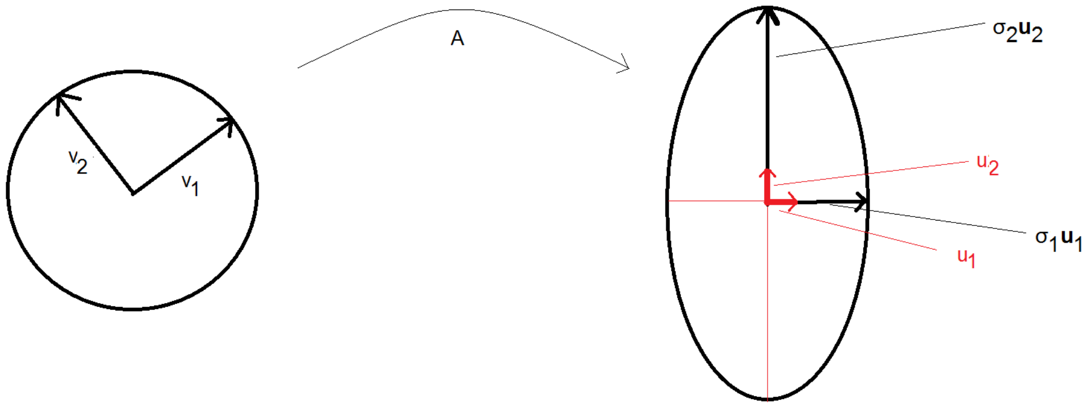
$$A_{m\times n} = \widehat{U}_{m\times n}\widehat{\Sigma}_{n\times n}{V^T}_{n\times n}$$

افزودن چند (m-n) بردار نرمال متعامد به $\widehat{U}$

- متعاقبا افزودن چند سطر صفر به انتهای $\widehat{\Sigma}$

$$A_{m\times n} = U_{m\times m}\Sigma_{m\times n}{V^T}_{n\times n}$$

تجزیهٔ مقدار تکین



تجزیهٔ مقدار تکین

$$A_{m\times n} = U_{m\times m}\Sigma_{m\times n}{V^T}_{n\times n}$$

تجزیه مقدار تکین

نمایش بردار دلخواه $\boldsymbol{x}$ با دو بردار پایهٔ $\boldsymbol{v}_{۱}$ و $\boldsymbol{v}_{۲}$

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v}_{۱})\boldsymbol{v}_{۱} + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v}_{۲})\boldsymbol{v}_{۲}$$

ضرب هر دو طرف با ماتریس تبدیل M

$$M\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v}_{۱})M\boldsymbol{v}_{۱} + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v}_{۲})M\boldsymbol{v}_{۲}$$

امکان نوشتن $M\boldsymbol{v}_{۱}$ با $\boldsymbol{u}_i\sigma_i$

$$M\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v}_{۱})\boldsymbol{u}_{۱}\sigma_{۱} + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v}_{۲})\boldsymbol{u}_{۲}\sigma_{۲}$$

چون $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v}_{۱} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{v}_{۱} = \boldsymbol{v}_{۱}^T\boldsymbol{x}$

$$M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_{۱}\sigma_{۱}\boldsymbol{v}_{۱}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}_{۲}\sigma_{۲}\boldsymbol{v}_{۲}^T\boldsymbol{x}$$

داریم $A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} \Leftrightarrow A = B$

$$M = \boldsymbol{u}_{۱}\sigma_{۱}\boldsymbol{v}_{۱}^T + \boldsymbol{u}_{۲}\sigma_{۲}\boldsymbol{v}_{۲}^T$$

نمایش با ماتریس ۲ × ۲

$$M = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{۱} & \boldsymbol{u}_{۲} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{۱} & 0 \\ 0 & \sigma_{۲} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Sigma}} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_{۱}^T \\ \boldsymbol{v}_{۲}^T \end{bmatrix}}_{\mathrm{V}^{\boldsymbol{T}}}$$

تجزیهٔ مقدار تکین

قضیه

هر ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ دارای تجزیهٔ مقدار تکین است

تجزیهٔ مقدار تکین

$$AA^T = U\Sigma V^T (U\Sigma V^T)^T$$
$$= U\Sigma V^T V\Sigma U^T$$
$$= U\Sigma I\Sigma U^T$$
$$= U\Sigma^{۲} U^T$$

$$AA^T U = U\Sigma^{۲} U^T \mathrm{U}$$
$$= U\Sigma^{۲}$$

$$A^T A = (U\Sigma V^T)^T U\Sigma V^T$$
$$= V\Sigma U^T U\Sigma V^T$$
$$= V\Sigma I\Sigma V^T$$
$$= V\Sigma^{۲} V^T$$

$$A^T AV = V\Sigma^{۲} V^T \mathrm{V}$$
$$= V\Sigma^{۲}$$

تجزیه مقدار-تکین

قضیه تمت

ماتریس مربع $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ دارای رتبهٔ $\rho(A) \in [0,$ کم$(m,n)]$ باشد. تمت A:

$$A = U\Sigma V^T$$

- $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ماتریس متعامد واحد (یکانی) با ستون‌های $\boldsymbol{u}_i$
- $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس متعامد واحد (یکانی) با ستون‌های $\boldsymbol{v}_i$
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ با $\Sigma_{ii} = \sigma_i \geq 0$ و $\Sigma_{ij} = 0$
  - σ_i مقادیر قطری است که مقدار تکین خوانده می‌شوند
  - u_i بردار تکین-چپ
  - v_i بردار تکین-راست
  - قرارداد: $\sigma_۱ \geq \sigma_۲ \geq \sigma_۳ \geq \sigma_r \geq 0$

تجزیه مقدار-تکین - ادامه

$$\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

- نیاز به پرکردن با صفر خاصه $m > n$

تجزیه مقدار-تکین - ادامه

$$A = U\Sigma V^T = \sigma_۱ \boldsymbol{u}_۱ \boldsymbol{v}_۱^T + \sigma_۲ \boldsymbol{u}_۲ \boldsymbol{v}_۲^T + \cdots$$

$A = \begin{bmatrix} ۱ & 0 & ۱ \\ -۲ & ۱ & 0 \end{bmatrix}$

تجزیه مقدار-منفرد- مثال - ادامه

ب- محاسبهٔ ماتریس مقدار تکین

- σ_i مقادیر ریشهٔ بردارهای A^TA
- استفاده از D
- در این مثال رتبه برابر ۲

$$A^{\mathrm{T}}\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \frac{۵}{\sqrt{۳۰}} & 0 & -\frac{۱}{\sqrt{۶}} \\ -\frac{۲}{\sqrt{۳۰}} & \frac{۱}{\sqrt{۵}} & -\frac{۲}{\sqrt{۶}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۳۰}} & \frac{۲}{\sqrt{۵}} & \frac{۱}{\sqrt{۶}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۶ & 0 & 0 \\ 0 & ۱ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۵}{\sqrt{۳۰}} & -\frac{۲}{\sqrt{۳۰}} & \frac{۱}{\sqrt{۳۰}} \\ 0 & \frac{۱}{\sqrt{۵}} & \frac{۲}{\sqrt{۵}} \\ -\frac{۱}{\sqrt{۶}} & -\frac{۲}{\sqrt{۶}} & \frac{۱}{\sqrt{۶}} \end{bmatrix} = PDP^T$$

$$V = P = \begin{bmatrix} \frac{۵}{\sqrt{۳۰}} & 0 & -\frac{۱}{\sqrt{۶}} \\ -\frac{۲}{\sqrt{۳۰}} & \frac{۱}{\sqrt{۵}} & -\frac{۲}{\sqrt{۶}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۳۰}} & \frac{۲}{\sqrt{۵}} & \frac{۱}{\sqrt{۶}} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{۶} & 0 & 0 \\ 0 & ۱ & 0 \end{bmatrix}$$

تجزیه مقدار-منفرد- مثال - ادامه

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & 0 & ۱ \\ -۲ & ۱ & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = P = \begin{bmatrix} \frac{۵}{\sqrt{۳۰}} & 0 & -\frac{۱}{\sqrt{۶}} \\ -\frac{۲}{\sqrt{۳۰}} & \frac{۱}{\sqrt{۵}} & -\frac{۲}{\sqrt{۶}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۳۰}} & \frac{۲}{\sqrt{۵}} & \frac{۱}{\sqrt{۶}} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{۶} & 0 & 0 \\ 0 & ۱ & 0 \end{bmatrix}$$

ج- محاسبهٔ بردارهای تکین-چپ

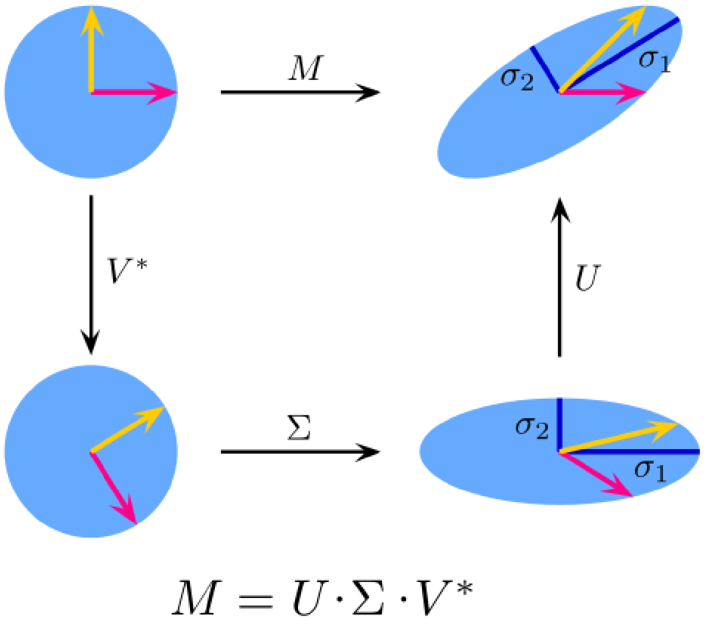
- استفاده از تصویر نرمال‌شدهٔ بردارهای تکین-راست
- در این مثال رتبه برابر ۲

$$\boldsymbol{u}_۱ = \frac{۱}{\sigma_۱} A\boldsymbol{v}_۱ = \frac{۱}{\sqrt{۶}} \begin{bmatrix} ۱ & 0 & ۱ \\ -۲ & ۱ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۵}{\sqrt{۳۰}} \\ \frac{-۲}{\sqrt{۳۰}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۳۰}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۵}} \\ -\frac{۲}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_۲ = \frac{۱}{\sigma_۲} A\boldsymbol{v}_۲ = \frac{۱}{۱} \begin{bmatrix} ۱ & 0 & ۱ \\ -۲ & ۱ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{۱}{\sqrt{۵}} \\ \frac{۲}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۲}{\sqrt{۵}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{u}_۱, \boldsymbol{u}_۲] = \frac{۱}{\sqrt{۵}} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

«تجزیهٔ مقدار ویژه» رودرروی «تجزیه مقدار تکین»



ویکی

$A = PD\,P^{-1}$ و $A = U\Sigma\,V^T$

- تجزیه مقدار تکین (تمت) برای هر ماتریسی موجود است.
  - تجزیه مقدار ویژه (تمو) صرفا ماتریس مربع و با شرط داشتن پایهٔ بردار ویژه
- P در تمو لزوما متعامدنرمال نیست
  - نشان‌دهندهٔ چرخش و مقیاس نیست
- U و V متعامد نرمال
  - نمایشگر چرخش
- هر دو حاصل سه نگاشت خطی
  - الف- تغییر پایه در دامنه
  - ب- مقیاس‌بندی مستقل از هر پایه و نگاشت از دامنه به هم‌دامنه
  - ج- تغییر پایه در هم‌دامنه
- تفاوت اساسی: دامنه و هم‌دامنه در تمت از فضاهای برداری با ابعاد متفاوت
- U و V لزوما معکوس یکدیگر نیستند

«تجزیهٔ مقدار ویژه» رودرروی «تجزیه مقدار تکین» - ادامه

- تمت مقادیر ماتریس قطری حقیقی و نامنفی
- یکسانی «تمو» و «تمت» ماتریس مربع متقارن

مثال

کاهش داده

تعمیم داده‌محور تبدیل فوریه

حل دستگاه معادلات خطی

- کمینه مربعات رگرسیون خطی

ژن–انسان

فیلم-تماشاگر

آزمایش دارو

تاثیر بر تصمیم مردم

تشخیص تصویر مردم

انواع فاکتورگیری ماتریس در «جبر خطی»

$M = LU$ حذف

$M = QR$ متعامدسازی

$S = Q\Lambda Q^T$ ماتریس متقارن و ویژه‌بردار

$M = X\Lambda X^{-1}$ قطری‌سازی ماتریس مربع

$M = U\Sigma V^T$ تجزیه مقدار تکین هر ماتریسی

منابع

[لِی]

[بوید]

[لرسن]

[نازه‌دل]

[آنتونیو]

[چاپرا]

[دایزن‌روث]

[استرانگ] The Four Fundamental Subspaces: 4 Lines, Gilbert Strang

“How to intuitively understand eigenvalue and eigenvector?,” https://math.stackexchange.com/questions/243533/how-to-intuitively-understand-eigenvalue-and-eigenvector

“Eigenvalues and eigenvectors,” https://www.statlect.com/matrix-algebra/eigenvalues-and-eigenvectors

“What do eigenvalues and eigenvectors represent intuitively? What is their significance?,” https://www.quora.com/What-do-eigenvalues-and-eigenvectors-represent-intuitively-What-is-their-significance

“Eigenvalues,” https://intuitive-math.club/linear-algebra/eigenvalues/

Singular Value Decomposition as Simply as Possible